Varianta 034

Subiectul I

a) $a=3, b=-1$. b) $\left(\frac{8}{3},3\right)$. c) $m_{AC}\cdot m_{BD}=-1$. d) 20. e) $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$. f) $5\sqrt{2}$..

Subiectul II

1. a) $-1;1$.. b) $C_{50}^{2}2^{48}x^{\frac{146}{3}}$. c) $q=X^2+3X+9; r=27X$. d) Da. e) 2

2. a) $2e^{2x}$. b) $f'(x)>0$. c) $f''(x)>0$. d) $y=0$. e) $y=2x+1$.

Subiectul III

a) Verificarea este imediată.

b) Dacă r>0, punctul $P\left(\frac{a}{r},\frac{b}{r}\right)$ este situat pe cercul unitate. Asadar exista numarul unic $t\in[0,2\pi)$ astfel încât $\frac{a}{r}=\cos t$, $\frac{b}{r}=\sin t$.

Dacă $P=O$, atunci $a=b=r=0$ *si* $t\in[0,2\pi)$ e oarecare.

c) Se utilizează metoda inductiei matematice si se tine cont de formulele
$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ si $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$.

d) Din egalitatea $A^{n+1}=A^n\cdot A,(\forall)n\in\mathbf{N}^*$ obtine, $\det(A^{n+1})=\det(A^n)\det(A),(\forall)n\in\mathbf{N}^*$, deci $a_{n+1}^2+b_{n+1}^2=(a^2+b^2)(a_n^2+b_n^2),(\forall)n\in\mathbf{N}^*$. Inductiv se obtine $a_{n+1}^2+b_{n+1}^2=(a^2+b^2)^n$.

e)Daca $a^2+b^2<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a^2+b^2)^n=0$,deci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=0$. Avem inegalitatile:

$0\le a_n^2\le a_n^2+b_n^2,(\forall)n\in\mathbf{N}^*$ si $0\le b_n^2\le a_n^2+b_n^2,(\forall)n\in\mathbf{N}^*$. Din criteriul “clestelui” obtinem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

f) Fie $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$. Din $\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}X=X\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ rezultă $z=-x$ si $x=t$. Asadar exista $a,b\in\boldsymbol{R}$ astfel incat $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\in$ M

g) Fie A=$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$ Avem $XA=XX^{2007}=X^{2007}X=AX$.

Din f) rezultă că $X=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}, a,b\in\mathbf{R}$. Din $X^{2007}=A$ rezulta $(\det X)^{2007}=1$ rezulta $\det X=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$. Asadar exista $x\in\mathbf{R}$ astfel ca $a=\cos x, b=\sin x$.

Avem $X=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$. Ecuatia devine

$\begin{pmatrix} \cos 2007x & -\sin 2007x \\ \sin 2007x & \cos 2007x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$, obtinem $x_k = \dfrac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2007}, k \in \mathbf{Z}$.

Ecuatia are 2007 solutii si anume $X_k = \begin{pmatrix} \cos x_k & -\sin x_k \\ \sin x_k & \cos x_k \end{pmatrix}, k \in \{0,1,...2006\}$.

Subiectul IV

a) Prin inductie rezulta : $a_n > 0, (\forall) n \geq 0,\ \ a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{a_n} > 0, (\forall) n \in \mathbf{N} \Rightarrow$

$(a_n)_{n\geq 0}$ strict crescător.

b) $a_{n+1}^2 = a_n^2 + \dfrac{1}{a_n^2} + 2 > a_n^2 + 2, (\forall) n \in \mathbf{N}$.

c) Din a) rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, $l \in (0,\infty)$ sau $l = \infty$. Presupunand că $l \in (0,\infty)$, trecem la limita in relația de recurență şi obținem $l = l + \dfrac{1}{l}$. Deducem că $\dfrac{1}{l} = 0$ fals. Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

d) Fie P*(n):* $a_n > \sqrt{2n+1}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$ si $Q(n): a_n \leq \sqrt{(2n+1)+1+\dfrac{1}{3}+...\dfrac{1}{2n-1}}, (\forall) n \geq 1$.

Cum $a_1 = 2 > \sqrt{3}$ arătăm ca $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Avem de notat $a_{n+1} > \sqrt{2n+3}$. Din $P(n)$ rezultă ca $a_n > \sqrt{2n+1}$ de unde $a_n^2 > 2n+1$. Avem

$a_{n+1}^2 > a_n^2 + 2 > 2n+3 \Leftrightarrow a_{n+1} > \sqrt{2n+3}$. Cum $a_1 = 2 \leq 2$ aratam ca *Q(n)* $\Rightarrow Q(n+1)$. Avem de arătat

$a_{n+1} \leq \sqrt{(2n+3)+1+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2n+1}} \Leftrightarrow a_{n+1}^2 \leq (2n+3)+1+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2n+1}$

e) Fie $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(t) = \ln t$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției pe intervalul $[x,x+1]$ si avem $f(x+1) - f(x) = (x+1-x) f'(c) = \dfrac{1}{c}$, unde $c \in (x,x+1)$. Deducem că $\dfrac{1}{x+1} < c < \dfrac{1}{x}, (\forall) x > 0$ si deci

$\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}, (\forall) x > 0.$

f) $\sqrt{2n+1} < a_n \leq \sqrt{(2n+1)+1+\dfrac{1}{3}+...\dfrac{1}{2n-1}} < \sqrt{(2n+1)+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...\dfrac{1}{2n-1}}, (\forall) n \geq 1.$

Din e)$\Rightarrow$ $\ln 2 - \ln 1 > \dfrac{1}{2}, \ln 2 - \ln 2 > \dfrac{1}{3}, ..., \ln(2n-1) - \ln(2n-2) > \dfrac{1}{2n-1} (\forall) n \in \mathbf{N}^*$

Deducem că $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...\dfrac{1}{2n-1} < \ln(2n+1), \forall n \in \mathbf{N}^*$

$\Rightarrow \sqrt{2n+1} < a_n < \sqrt{(2n+1)+1+\ln(2n+1)}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

Rezultă că: $\dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}} < \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{\dfrac{(2n+2)}{n} + \dfrac{\ln(2n+1)}{n}}, (\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Obtinem: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$

g) Avem $\dfrac{1}{a_n} = a_{n+1} - a_n, (\forall) n \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n} = a_{n+1} - a_0 = a_{n+1} - 1, (\forall) n \geq 0.$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \infty$ obtinem $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}) = \infty$.